

## Feuille de TD 1

### Règles de calcul

**Exercice 1.** Écrire sous forme de fraction et sans exposants les nombres suivants :

1.  $a = 4^{-3}$ ,  $b = 5^{-2}$ ,  $c = 8^{-5}$ ,  $d = (2^{-3})^{-2}$ ,  $e = 5^{-3} \cdot 5^{-1}$  ;

2.  $a = \frac{1}{2^{-3}}$ ,  $b = \left(\frac{2}{5}\right)^{-2}$ ,  $c = \left(-\frac{2}{3}\right)^4 \left(-\frac{2}{3}\right)^{-6}$ .

**Exercice 2.** Écrire sous forme de fraction et sans exposants les nombres suivants :

1.  $a = 16^{\frac{1}{2}}$ ,  $b = 81^{3/4}$ ,  $c = 27^{4/3}$ ,  $d = 64^{1/3}$ ,  $e = \left(\frac{25}{4}\right)^{3/2}$  ;

2.  $a = (2^{-1/3})^{-21}$ ,  $b = (0,064)^{-5/3}$ ,  $c = 5^{-4} \cdot 5^2$ ,  $d = (5^{-1} + 5^0)^{-1}$ ,  $e = 7^{-1/2} \cdot 7^{5/2}$ .

**Exercice 3.** Simplifier les fractions suivantes :

$$A = \frac{a^3 b^2}{a^2 b} \cdot \frac{ab^3}{a^3 b^2}; \quad B = \frac{\frac{3a^2}{5b}}{\frac{2a^3}{6b^3}}; \quad C = \frac{\frac{a+b}{c}}{\frac{(a+b)^2}{c^4}}; \quad D = \frac{a - \frac{1}{b}}{1 - \frac{a}{\frac{1}{b}}}$$

**Exercice 4.** Écrire comme quotients de polynômes les quantités suivantes :

1.  $A(x) = (5x)^{-3}$  ;

2.  $B(x, y) = \left(\frac{8x^6}{y^3}\right)^{2/3}$  ;

3.  $C(x) = \left(\frac{81x^4}{(x^2+2x+1)^2}\right)^{-1/2}$  ;

**Exercice 5.** Écrire sous forme d'un quotient (factorisé et simplifié) les expressions suivantes :

1.  $A(x) = \frac{1}{x} - \frac{1+x}{x^2}$  ;

2.  $B(x) = x - 3 - \frac{x-3}{x+1}$  ;

3.  $C(x) = \frac{x-2(x-2)}{(x+3)(x-2)}$  ;

4.  $D(x) = \frac{x+1}{x+3} - \frac{x}{x-2}$ .

**Exercice 6.** Simplifier les expressions suivantes :

$$a = 2\sqrt{2} - 3\sqrt{3} + 5\sqrt{2} - 4\sqrt{3} - 10\sqrt{2} + 8\sqrt{3},$$

$$b = 3\sqrt{2} + \sqrt{8} - \sqrt{32} + 5\sqrt{18},$$

$$c = 5\sqrt{6} - 2\sqrt{2}\sqrt{3} + \sqrt{3}\sqrt{8}$$

**Exercice 7.** Simplifier les fractions suivantes en utilisant des identités remarquables :

$$A = \frac{a}{a^2 - 1} + \frac{2}{a^2 + 2a + 1}; \quad B = \frac{\frac{a^2 - b^2}{3a + 3b}}{\frac{2ab}{9a - 9b} \cdot \frac{(a - b)^2}{a^2 b^2}}; \quad C = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + ab}.$$

**Exercice 8.** Développer et réduire les expressions suivantes :

$$1. A(x) = (x - 1)(-x + 2) + (2x + 1)^2,$$

$$2. B(x) = (x - 3)^2 - 4x(x + 1),$$

$$3. C(x) = (2x + 5)^2 - (5x + 2)(5x - 2) - (1 - x)(3 + x)$$

$$4. D(x, y) = (x - y + 1)(x + y - 1)$$

**Exercice 9.** En utilisant les identités remarquables, lorsque c'est possible, factoriser les expressions suivantes :

$$1. A(x) = 49 - 25x^2;$$

$$5. E(x) = x^2 + 20x + 25;$$

$$2. B(x) = 2x^2 - 12x + 18$$

$$6. F(x) = 3(x + 1)^2 - 6x - 15;$$

$$3. C(x) = 16 + 49x^2 + 56x;$$

$$7. G(x) = 8x - (x + 2)^2.$$

$$4. D(x) = 4x^2 + 36;$$

**Exercice 10.** Écrire les nombres suivants sans radical au dénominateur :

$$a = \frac{2\sqrt{3}}{5\sqrt{6}}, \quad b = \frac{1 + 2\sqrt{3}}{3\sqrt{3}}, \quad c = \frac{1 + \sqrt{3}}{\sqrt{3} - 2}, \quad d = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}, \quad e = \frac{2}{1 + \sqrt{2} - \sqrt{3}}$$

**Exercice 11. (\*)** Écrire les nombres suivants sans radical :

$$a = \sqrt[3]{\frac{27}{64}}; \quad b = \sqrt[3]{5} \sqrt[3]{25}; \quad c = \sqrt[4]{16}; \quad d = \frac{\sqrt[5]{4} \sqrt[4]{8} (\sqrt[3]{\sqrt[5]{4}})^2}{3\sqrt{\sqrt{2}}}$$

## Équations, inéquations

**Exercice 12.** Résoudre les équations suivantes :

1.  $2 + \frac{1}{x+2} = \frac{7}{x+2}$

4.  $x + 2 = \frac{x^2 - x - 6}{x+1}$

2.  $\frac{5}{x-5} + 6 = \frac{x}{x-5}$

5.  $(x+3)(x-6) = (x+1)(x+7)$

3.  $1 + \frac{4}{3x+4} = \frac{-3x}{3x+4}$

6.  $(x+2)(x+3) = x^2 - x - 6.$

**Exercice 13.** Résoudre les équations suivantes, où  $x$  est l'inconnue et  $a, b$  sont des paramètres. On discutera selon la valeur des paramètres.

1.  $\frac{3x}{2} - a = x + 3a$

2.  $a(x-3) = 2x + b$

3.  $\frac{a+x-2}{a-x} = 1$

4.  $\frac{a+3}{a-2} = \frac{x}{a^2-4}.$

**Exercice 14.** Résoudre les inéquations suivantes (on pourra s'aider d'un tableau de signe), et représenter l'ensemble des solutions sur la droite réelle :

1.  $3x - 2 < 7$

5.  $\frac{x+2}{x+1} > 2$

2.  $-3x \geq -12$

6.  $\frac{x^2}{x-2} \leq x + 3,$

3.  $(x+2)(7x-1) \leq 0,$

7.  $\frac{x+1}{x+2} > \frac{x-2}{x-1}$

4.  $(x-5)(-2x-4) > 0$

8.  $(-2x+1)(4+2x)(3x-2) \geq 0$

**Exercice 15.** Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations suivantes :

1.  $x^2 + 3x + 1 = 0,$

6.  $x^3 + 3x^2 + 2x = 0,$

2.  $x^2 + 3x + 2 = 0,$

7.  $x^4 - 3x^2 - 4 = 0,$

3.  $x^2 + 3x + 3 = 0,$

8.  $x + \frac{1}{x} + 2 = 0,$

4.  $x^2 + 3x = 0,$

9.  $x^2 + 3 = 0.$

5.  $x^2 + x = 2,$

**Exercice 16.** Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les inéquations suivantes :

1.  $x^2 + 3x + 1 < 0,$

6.  $x^3 + 3x^2 + 2x > 0,$

2.  $x^2 + 3x + 2 \leq 0,$

7.  $3x^2 - 2x^4 \geq -2,$

3.  $x^2 + 3x + 3 < 0,$

8.  $x + \frac{1}{x} < 3,$

4.  $x^2 + 3x > 0,$

9.  $1 - x^2 < 1 - x.$

5.  $x^2 + 3x > 1,$

**Exercice 17.** Résoudre les équations suivantes :

1.  $|x + 2| = 3$

2.  $|-2x + 3| = 0$

3.  $|x + 1| = |x|$

4.  $|x - 4| = x$

5.  $x^2 - 1 = |(x - 1)x|$

6.  $|x + 2| = |3x - 1|$

7.  $|-2x + 3| = -x^2$

8.  $|x + 1| = |x^2 - 1|$

9.  $|x - 4| = x^2 - 8x + 16,$

10.  $x^2 - 1 = |x|.$

**Exercice 18.** Résoudre les inéquations suivantes :

(a)  $|x - 2| \leq 4,$       (b)  $|x - 2| \geq 1,$       (c)  $|3x + 5| > 2,$       (d)  $|2x - 1| < 3,$       (e)  $|x - 1| \leq |x - 3|,$

(f)  $|x - 2| > |x + 4|,$       (g)  $|x + 3| \leq 2x,$       (h)  $\frac{x + 2}{|x - 1|} \geq 0,$       (i)  $\left| \frac{x - 3}{x - 2} \right| < 1,$       (j)  $|(x - 1)(x + 2)| \leq x^2 + 2.$

**Exercice 19. (\*)**

1. Résoudre dans  $\mathbb{R}$  :  $x + 1 > \sqrt{2x + 1}$  ;

2. Résoudre dans  $\mathbb{R}$  :  $(x + 1) < 2\sqrt{x} + 1.$

**Exercice 20. (\*)**

1. Résoudre dans  $\mathbb{R}$  :  $1 < \sqrt{x + 1}$  ;

2. Résoudre dans  $\mathbb{R}$  :  $\sqrt{x^2 + 1} < x - 2$  ;

3. Résoudre dans  $\mathbb{R}$  :  $\sqrt{x^2 + 4} < x + 1-$