

Concepts informatiques I

Semaine 02 - Algèbre de Boole - forme normales

TD

$$E = \underbrace{\neg(\neg c \wedge (a \vee \neg b))}_1 \oplus \underbrace{\neg(b \Rightarrow \neg c)}_2$$

1. Écrire ① sous forme condensée.

$$\overline{(\bar{c}(a+b))}$$

2. Écrire ② sous forme condensée (sans autre opérateur que négation, conjonction, disjonction.)

$$A \Rightarrow B \equiv \neg A \vee B$$

$$\overline{(\bar{b} + \bar{c})} \Leftrightarrow b + c$$

3. En déduire une forme condensée pour E (sans autre opérateur que négation, conjonction, disjonction.)

$$\bar{c}(a+b) \overline{(\bar{b} + \bar{c})} + \overline{\bar{c}(a+b)} (\bar{b} + \bar{c})$$

$$A \oplus B = (\neg A \wedge B) \vee (A \wedge \neg B)$$

$$A = \bar{c}(a+b)$$

$$B = \overline{(\bar{b} + \bar{c})} \Leftrightarrow b + c$$

Exercice 2:

Simplifier les expressions suivantes.

1. propage la négation

$$\overline{(\bar{a} + b)(a + \bar{b})} \\ \Leftrightarrow (\bar{a} \bar{b}) + (\bar{a} b) \equiv A \oplus B \\ \text{donc} \\ \overline{(\bar{a} + b)(a + \bar{b})} \equiv A \oplus B$$

2. $\bar{a}b + \bar{a}\bar{b} + ab$. (Table de vérité) il faut bien connaître!

a	b	\bar{a}	\bar{b}	$\bar{a}b$	$\bar{a}\bar{b}$	ab	$\bar{a}b + \bar{a}\bar{b} + ab$	$a+b$
0	0	1	1	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	1	0	1	1
1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	0	0	0	1	1	1

$$\text{donc } \bar{a}b + \bar{a}\bar{b} + ab \Leftrightarrow a + b$$

3.

$$(a+b) \Rightarrow (a+\bar{b}+c)$$

a	b	c	\bar{b}	$a+b$	$a+\bar{b}+c$	$(a+b) \Rightarrow (a+\bar{b}+c)$
0	0	0	1	0	1	1
0	0	1	1	0	1	1
0	1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1	1
1	0	0	1	1	1	1
1	0	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1
1	1	1	0	1	1	1

$$(a+b) \Rightarrow (a+\bar{b}+c) \Leftrightarrow a+\bar{b}+c$$

4. $(a+b+c)(ab+ac+bc)$

a	b	c	$a+b+c$	ab	ac	bc	$ab+ac+bc$	$(a+b+c) \Rightarrow (ab+ac+bc)$
0	0	0	0	0	0	0	0	1
0	0	1	1	0	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	1	1	1
1	0	0	1	0	0	0	0	0
1	0	1	1	0	1	0	1	1
1	1	0	1	1	0	0	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1

$$(a+b+c) \Rightarrow (ab+ac+bc) \Leftrightarrow ab+ac+bc$$

Exercice 3. Considérons à nouveau la formule Σ de l'exercice 1

1a. Construire une table de vérité pour Σ

a	b	c	\bar{b}	\bar{c}	$a \vee \bar{b} \vee \bar{c}$	$\neg(b \Rightarrow \neg c)$	$\neg(\neg c \wedge (a \vee \bar{b}))$	$\neg(b \Rightarrow \neg c)$
0	0	0	1	1	1	0	0	0
0	0	1	1	0	1	0	1	0
0	1	0	0	1	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0	1	0	0
1	0	0	1	1	1	0	0	0
1	0	1	1	0	1	0	1	0
1	1	0	0	1	1	0	0	0
1	1	1	0	0	1	0	1	0

1b. En déduire une dnf :

DNF: $\neg a \wedge \neg b \wedge \neg c \vee \neg a \wedge b \wedge c \vee a \wedge \neg b \wedge \neg c \vee a \wedge b \wedge c$
 $\vee \neg a \wedge \neg b \wedge c \vee \neg a \wedge b \wedge \neg c \vee a \wedge \neg b \wedge c$

2a. Donner une NNF :

$$\neg(\neg c \wedge (a \vee \neg b)) \oplus \neg(b \Rightarrow \neg c).$$

$$= ((\neg(\neg c \wedge (a \vee \neg b))) \wedge \neg(b \Rightarrow \neg c)) \vee ((\neg(\neg c \wedge (a \vee \neg b))) \wedge \neg(\neg(b \Rightarrow \neg c)))$$

$$= ((\neg c \wedge (a \vee \neg b)) \wedge \neg(\neg b \vee \neg c)) \vee ((\neg c \wedge \neg(a \vee \neg b)) \wedge (\neg b \vee \neg c))$$

$$NNF = ((\neg c \wedge (a \vee \neg b)) \wedge (b \wedge c)) \vee ((c \wedge (\neg a \wedge b)) \wedge (\neg b \vee \neg c))$$

2b. On deduit une DNF:

a	b	c	$\neg b$	$\neg c$	$\neg c \wedge (a \vee \neg b)$	$b \wedge c$	$(\neg c \wedge (a \vee \neg b)) \wedge (b \wedge c)$	$c \vee (\neg a \wedge b) \wedge (\neg b \vee \neg c)$	\neq
0	0	0	1	1	1	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0	1	0
0	1	0	0	1	0	0	0	1	0
0	1	1	0	0	0	1	0	1	0
1	0	0	1	1	1	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0	0	1	0
1	1	0	0	1	1	0	0	1	0
1	1	1	0	0	0	1	1	1	0

On obtient la DNF qui est la formule minimale.

Exercice 4:

$$x = (x \Rightarrow \neg z) \vee (\neg x \Leftarrow y).$$

$$((x \Rightarrow \neg z) \wedge (\neg \neg z \Rightarrow x)) \vee ((\neg x \Rightarrow y) \wedge (y \Rightarrow \neg \neg x))$$

$$[(\neg x \vee \neg z) \wedge (z \vee x)] \vee [(x \vee y) \wedge (\neg y \vee \neg x)]$$

x	y	z	$\neg x$	$\neg y$	$\neg z$	$(\neg x \vee \neg z) \wedge (z \vee x)$	$(x \vee y) \wedge (\neg y \vee \neg x)$
0	0	0	1	1	1	0	0
0	0	1	1	1	0	1	0
0	1	0	1	0	1	0	1
0	1	1	1	0	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	0
1	0	1	0	1	0	0	0
1	1	0	0	0	1	1	1
1	1	1	0	0	0	0	0

$$\neg x \wedge y \wedge z$$

$$x \wedge \neg y \wedge \neg z$$

$$DNF = \neg x \wedge y \wedge z \vee x \wedge \neg y \wedge \neg z.$$

$$NNF = [(\neg x \vee \neg z) \wedge (z \vee x)] \vee [(x \vee y) \wedge (\neg y \vee \neg x)]$$

$$= [(\neg x \vee \neg z) \wedge (z \vee x)] \vee [(x \vee y) \wedge (\neg y \vee \neg x)].$$

Parce que la DNF de la formule initiale.

$$p = \neg((\neg x \Rightarrow y) \Rightarrow z)$$

$$\neg(\neg(\neg x \vee y) \vee z) \equiv \neg((\neg x \wedge \neg y) \vee z)$$

$\neg z$	x	y	z	$\neg x$	$\neg y$	$\neg(\neg x \wedge \neg y) \vee z$	$(x \vee y) \wedge \neg z$
1	0	0	0	1	1	0	0
0	0	0	1	1	1	0	0
1	0	1	0	1	0	1	0
0	0	1	1	1	0	0	0
1	1	0	0	0	1	1	0
0	1	0	1	0	1	0	0
1	1	1	0	0	0	1	0
0	1	1	1	0	0	0	0

$$DNF = \neg x \wedge y \wedge \neg z \vee x \wedge \neg y \wedge \neg z \wedge x \wedge y \wedge \neg z$$

$$NNF = \neg((\neg x \Rightarrow y) \Rightarrow z) \equiv \neg((\neg x \wedge \neg y) \vee z)$$

$$\begin{aligned} NNF(DNF) &= DNF_{\text{initiale}} \\ &= \neg(\neg x \wedge \neg y) \wedge \neg z \\ &= (\neg \neg x \vee \neg \neg y) \wedge \neg z \\ &= (x \vee y) \wedge \neg z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma &= \neg(x \wedge y \wedge z) \wedge ((x \wedge y) \vee (x \wedge z) \vee (y \wedge z)) \\ &= (\neg x \vee \neg y \vee \neg z) \wedge [(x \wedge y) \vee (x \wedge z) \vee (y \wedge z)] \end{aligned}$$

x	y	z	$\neg x$	$\neg y$	$\neg z$	$(\neg x \vee \neg y \vee \neg z) \wedge (x \wedge y \vee x \wedge z \vee y \wedge z)$	
0	0	0	1	1	1	0	
0	0	1	1	1	0	0	
0	1	0	1	0	1	0	
0	1	1	1	0	0	1	$\neg x \wedge y \wedge z$
1	0	0	0	1	1	0	
1	0	1	0	1	0	1	$x \wedge \neg y \wedge z$
1	1	0	0	0	1	1	$x \wedge y \wedge \neg z$
1	1	1	0	0	0	0	

$$DNF = x \wedge y \wedge z \vee x \wedge \neg y \wedge z \vee x \wedge y \wedge \neg z$$

$$NNF = \neg(x \wedge y \wedge z) \wedge (x \wedge y \vee x \wedge z \vee y \wedge z)$$

$$= (\neg x \vee \neg y \vee \neg z) \wedge (x \wedge y \vee x \wedge z \vee y \wedge z)$$

$$NNF(DNF) = DNF_{\text{initiale}}$$

Exercice 5: Un ensemble \mathcal{E} d'opérateurs booléens est dit complet si tout opérateur booléen peut s'exprimer en fonction de ceux de \mathcal{E} .

0. Rappelons comment montrer que $\{\neg, \wedge, \vee\}$ est complet si on le suppose pour la suite

1. Montrer que $\{\neg, \wedge\}$ et $\{\neg, \vee\}$ sont complets.

Construire \vee à partir de \neg et \wedge
On applique la loi de Morgan:

$$A \vee B = \neg(\neg A \wedge \neg B)$$

Construire \wedge à partir de \neg et \vee
On applique la loi de Morgan:

$$A \wedge B = \neg(\neg A \vee \neg B).$$

2. Montrer que $\{\neg, \Rightarrow\}$ et $\{\oplus, \Rightarrow\}$ sont complets.

Construire

$$A \oplus 1 = \neg A$$

$$A \Rightarrow A = 1 \quad \text{Alors } \neg A = \neg A \oplus 1 = A \oplus$$

$$A \vee B = \neg A \Rightarrow B$$

$$\text{donc } A \vee B = (A \oplus (A \Rightarrow B)) \Rightarrow B$$

$$A \wedge B = \neg(\neg A \vee \neg B)$$

$$\neg p = p \oplus (p \Rightarrow p).$$

Construire:

\neg (on l'a déjà).

$$A \vee B = \neg A \Rightarrow B$$

$$A \wedge B = \neg(\neg A \Rightarrow \neg B)$$

4. On il nous est nécessaire d'avoir la \neg (négation) pour compléter l'ensemble.

3. $\{\uparrow\}$ et $\{\downarrow\}$
NAND NOR

$$A \downarrow B = \neg(A \vee B)$$

$$\neg(A \downarrow B) = A \vee B$$

$$p \downarrow p = \neg(p \vee p) = \neg p$$

$$\underline{A \wedge B} = \neg(\neg A \downarrow \neg B)$$

$$A \uparrow B = \neg(A \wedge B)$$

$$\underline{A \wedge B} = \neg(A \uparrow B)$$

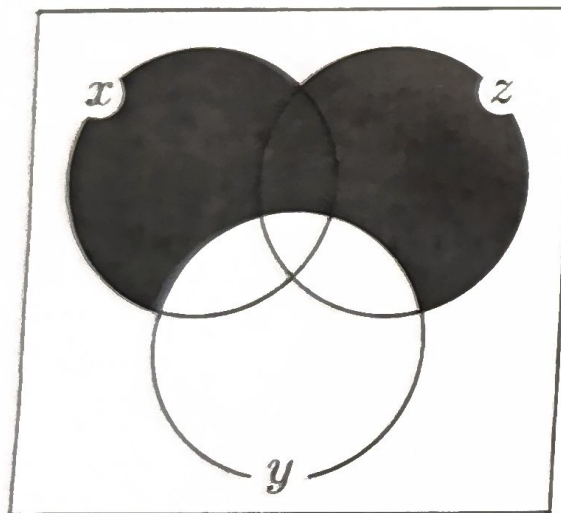
$$\underline{A \vee B} = \neg A \uparrow \neg B = \neg(\neg A \wedge \neg B) = A \vee B$$

$$A \uparrow A = \neg(A \wedge A) = \underline{\neg A}$$

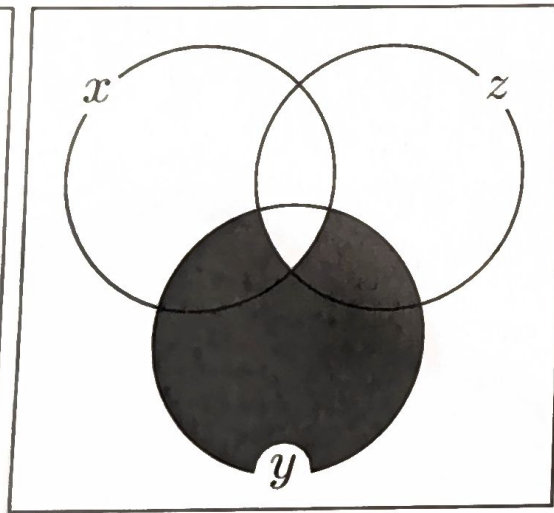
Exercice 6 On considère quatre formules booléennes et trois+un diagrammes de Venn.

1. Associer à chacun des trois diagrammes de gauche la formule correspondante.
2. Compléter le *quatrième* diagramme en accord avec la formule non encore associée.

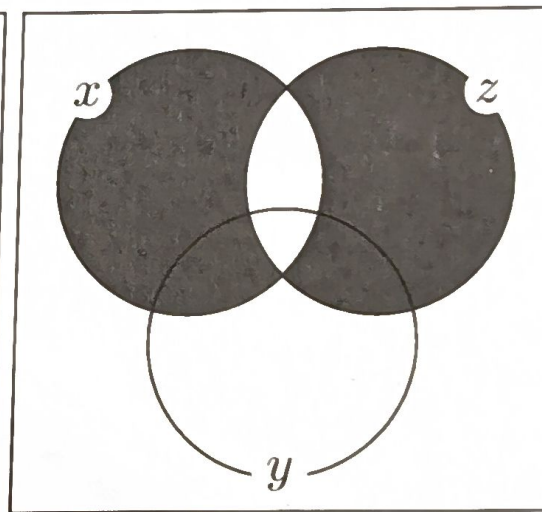
$$\varphi_1 = y(\bar{x} + \bar{z}) \quad \varphi_2 = x \oplus y \oplus z \quad \varphi_3 = (y + \bar{z})(x + z)(\bar{x} + \bar{y}) + (\bar{x} + y)(x + z)(\bar{y} + \bar{z}) \quad \varphi_4 = (x + z) \bar{y}$$



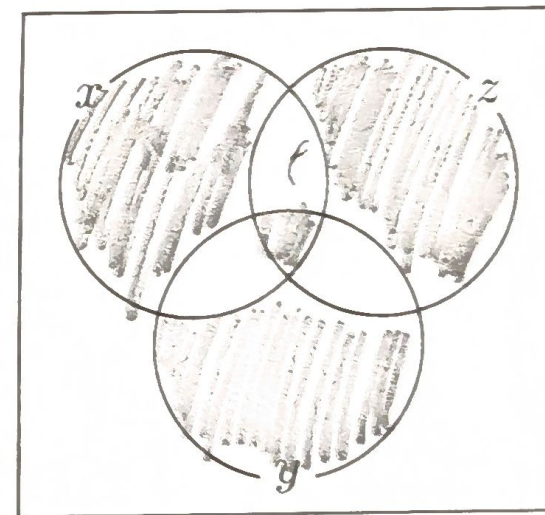
φ_4



φ_1



φ_3



φ_2