Semaine 02 – Algèbre de Boole – Formes normales – TD

Selon le contexte, il est possible d'utiliser une forme *condensée* pour les opérateurs de négation, de disjonction, et de conjonction : $\overline{x}$ plutôt que $\neg x$, $x + y$ plutôt que $x \vee y$, et xy plutôt que $x \wedge y$.

Exercice 1 . Soit la formule $\xi = \overbrace{\neg(\neg c \wedge (a \vee \neg b))}^{\xi_1} \oplus \overbrace{\neg(b \Rightarrow \neg c)}^{\xi_2}$.

1. Écrire ξ_1 sous forme condensée.
2. Écrire ξ_2 sous forme condensée (sans autre opérateur que négation, conjonction, disjonction).
3. En déduire une forme condensée pour ξ (sans autre opérateur que négation, conjonction, disjonction).

Exercice 2 Simplifier les expressions suivantes :

1. $\overline{(\overline{a} + b)(a + \overline{b})}$ 2. $a\overline{b} + \overline{a}b + ab$ 3. $(a + b) \Rightarrow (a + \overline{b} + c)$ 4. $(a + b + c)\overline{(ab + ac + bc)}$

Exercice 3 Considérons à nouveau la formule ξ de l'exercice **1**.

1a. Construire une table de vérité pour ξ.
b. En déduire une DNF pour ξ.

2a. Donner une NNF pour ξ.
b. En déduire une DNF pour ξ.

Exercice 4 Mêmes consignes que l'exercice **3** pour les formules α, β, et γ.

$$\alpha = (x \Leftrightarrow \neg z) \vee (\neg x \Leftrightarrow y) \qquad \beta = \neg((\neg x \Rightarrow y) \Rightarrow z) \qquad \gamma = \neg(x \wedge y \wedge z) \wedge (x \wedge y \vee x \wedge z \vee y \wedge z).$$

Exercice 5 Un ensemble E d'opérateurs booléens est dit *complet* si tout opérateur booléen peut s'exprimer en fonction de ceux de E.

0. Rappeler comment montrer que $\{\neg, \wedge, \vee\}$ est complet. Sinon le supposer pour la suite...
1. Montrer que $\{\neg, \wedge\}$ et $\{\neg, \vee\}$ sont complets.
2. Montrer que $\{\neg, \Rightarrow\}$ et $\{\oplus, \Rightarrow\}$ sont complets.
3. Montrer que $\{\uparrow\}$ et $\{\downarrow\}$ sont complets.
4. Expliquer pourquoi $\{\wedge, \vee\}$ n'est pas complet.

Exercice 6 On considère quatre formules booléennes et trois+un diagrammes de Venn.

1. Associer à chacun des trois diagrammes de gauche la formule correspondante.
2. Compléter le *quatrième* diagramme en accord avec la formule non encore associée.

$\varphi_1 = y(\overline{x} + \overline{z})$ $\qquad \varphi_2 = x \oplus y \oplus z$ $\qquad \varphi_3 = (y + \overline{z})(x + z)(\overline{x} + \overline{y}) + (\overline{x} + y)(x + z)(\overline{y} + \overline{z})$ $\qquad \varphi_4 = (x + z)\,\overline{y}$