

# Concepts Informatiques I

2025–2026

Matthieu Picantin



## Algèbre de Boole

- calcul des propositions dont le domaine  $\mathbb{B}$  est celui des **booléens**
  - $\mathbb{B}$  peut être  $\{\text{FAUX}, \text{VRAI}\}$ ,  $\{\text{false}, \text{true}\}$ ,  $\{\perp, \top\}$ , ou  $\{0, 1\}$
  - ces deux éléments sont appelés **valeurs de vérité**
- ensemble  $\mathbb{B}$  à deux éléments muni d'un opérateur unaire  $\neg$  (négation) et de deux opérateurs binaires  $\vee$  (disjonction) et  $\wedge$  (conjonction)

### Négation

$x$	$\neg x$
0	1
1	0



### Disjonction

$x$	$y$	$x \vee y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1



### Conjonction

$x$	$y$	$x \wedge y$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1



## Algèbre de Boole

- ◆ ensemble  $\mathbb{B} = \{0, 1\}$  muni d'un opérateur unaire  $\neg$  (négation) et de deux opérateurs binaires  $\vee$  (disjonction) et  $\wedge$  (conjonction)
- ◆ vérifiant, pour toutes variables booléennes  $x, y, z$  de  $\mathbb{B}$ , les axiomes suivants :

associativité	$x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$	$x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$
commutativité	$x \vee y = y \vee x$	$x \wedge y = y \wedge x$
absorption	$x \vee (x \wedge y) = x$	$x \wedge (x \vee y) = x$
distributivité	$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$	$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$
complémentation	$x \vee \neg x = 1$	$x \wedge \neg x = 0$

- ◆ ayant, pour toutes variables booléennes  $x, y$  de  $\mathbb{B}$ , les propriétés suivantes :

idempotence	$x \vee x = x$	$x \wedge x = x$
neutres	$x \vee 0 = x$	$x \wedge 1 = x$
involution	$\neg \neg x = x$	
De Morgan	$\neg(x \vee y) = \neg x \wedge \neg y$	$\neg(x \wedge y) = \neg x \vee \neg y$

- ◆ interprétation des valeurs :

$0 \leftrightarrow \text{false}$       et       $1 \leftrightarrow \text{true}$

## Expressivité vs non-unicité

- ◆ les équivalences entre formules montrent qu'une même propriété peut s'exprimer de plusieurs manières différentes
- ◆ cette **redondance** est intéressante pour l'expressivité
  - ▶ expression claire des notions via un vocabulaire riche
- ◆ mais elle peut aussi être un frein au traitement informatique
  - ▶ comparaisons, cas multiples à considérer, ...
- ◆ on recherche des **formes canoniques** pour les formules propositionnelles

## Forme normale de négation (NNF)

- ◆ un **littéral** est une formule qui est soit une variable, soit sa négation
- ◆ toute formule propositionnelle est équivalente à une formule propositionnelle sans connecteur  $\neg$  (sauf dans un littéral) et seulement des conjonctions et disjonctions
- ◆ les lois de De Morgan permettent de propager  $\neg$  vers les variables

## Expressivité vs non-unicité

- ◆ les équivalences entre formules montrent qu'une même propriété peut s'exprimer de plusieurs manières différentes
- ◆ cette **redondance** est intéressante pour l'expressivité
  - ▶ expression claire des notions via un vocabulaire riche
- ◆ mais elle peut aussi être un frein au traitement informatique
  - ▶ comparaisons, cas multiples à considérer, ...
- ◆ on recherche des **formes canoniques** pour les formules propositionnelles

## Forme normale disjonctive (DNF)

- ◆ un **littéral** est une formule qui est soit une variable, soit sa négation
- ◆ une **clause conjonctive** est soit la constante  $\top$ , soit un littéral, soit une conjonction d'au moins deux littéraux
- ◆ toute formule propositionnelle est équivalente à une formule qui est soit la constante  $\perp$ , soit une clause conjonctive, soit une disjonction d'au moins deux clauses conjonctives

## Forme normale disjonctive (DNF)

- ♦ un **littéral** est une formule qui est soit une variable, soit sa négation
- ♦ une **clause conjonctive** est soit la constante  $\top$ , soit un littéral, soit une conjonction d'au moins deux littéraux
- ♦ toute formule propositionnelle est équivalente à une formule qui est soit la constante  $\perp$ , soit une clause conjonctive, soit une disjonction d'au moins deux clauses conjonctives

### Plusieurs options pour obtenir une DNF

- ♦ une option "arithmétique" ou "sémantique"
  - ① calculer la table de vérité
  - ② de chaque  $\top$  extraire une clause conjonctive
- ♦ une option "algébrique"
  - ① distribuer  $\neg$  sur  $\vee$  et sur  $\wedge$  (De Morgan)  $\rightsquigarrow$  NNF
  - ② distribuer  $\wedge$  sur  $\vee$
- ♦ une option "graphique"
  - tables de Karnaugh vues en semaine 8...